Große Aufgabensammlung zu

Lineare Abhängigkeit
Basis, Dimension
Untervektorraum

Datei Nr. 61[illegible]05

1. J[illegible] 2022

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese Sammlung von fast 50 teils umfassenden Aufgaben zur linearen Algebra enthält auch die Trainingsaufgaben von

Text 61001 Vektorraum-Einführung Wichtig:

Da sehr oft Gleichungssysteme zu lösen sind, kommen verschiedene Berechnungsverfahren zum Einsatz: Additionsverfahren zur Eliminierung, Gauß-Algorithmus und Determinantenverfahren (Cramersche Regel). Bei allen Berechnungsverfahren sind unterschiedlich[illegible]nde Ergebnisse möglich. Sowie man bei der Lösung eine freie Wahl hat, hängt die Da[illegible]llungsform [illegible] davon ab, wie man wählt. Dann kann die inhaltlich gleiche Lösungsmenge ga[illegible] anders dargestellt [illegible].

In einem solchen Fall empfiehlt sich dann eben die Probe.

Ein Teil der Aufgaben rechnet mit Zeilenvektoren, meist[illegible]ber sin[illegible] Spaltenvektoren. Werden Zeilenvektoren als „absolute“ Darstellungsform g[illegible] komme[illegible] Spalten[illegible]oren als „relative“ Darstellungsform bzw. einer bestimmten Basis da[illegible]

Einige Aufgaben beziehen sich auf Vektor[illegible] $\mathbb{R}^4$.

Aufgaben

1 Stelle $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar (Zeilenvektoren): L: 12

(a) $\vec{x} = (-8|16),\ \vec{a} = (2|5),\ \vec{b} = (-4|2)$

(b) $\vec{x} = (2|5),\ \vec{a} = (-5|4),\ \vec{b} = (3|7)$

(c) $\vec{x} = (5|8),\ \vec{a} = (2|4),\ \vec{b} = (3|6)$

2 Stelle $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar (Spaltenvektoren): L: 13

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{[illegible]} \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -3{,}6 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3 Bestimme die Dimension der linearen Hüllen und gib eine Ba[illegible] an. L: 14

$L_1 = \left[\begin{pmatrix} 34 \\ -28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 51 \\ -42 \end{pmatrix}\right]$, $L_2 = \left[\begin{pmatrix} 48 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}\right]$ [illegible] $= \left[\begin{pmatrix} -[illegible] \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ [illegible] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 48 \end{pmatrix}\right]$

4 Für welches k ist L: 15

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ k \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 24 \\ 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \end{pmatrix}\right]$?

[illegible] $\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ [illegible] \end{pmatrix} \notin \left[\begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}\right]$

5 Gegeben sind die vier V[illegible]oren des $\mathbb{R}^3$: L: 16

$\vec{a} = (4|1|-1),\ \vec{b} = ([illegible]0|2),\ \vec{c} = (-[illegible]|3),\ \vec{d} = (-1[illegible])$

Berechne damit die[illegible]inearko[illegible]binationen:

$\vec{x}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{c}$, $\vec{x}_2 = [illegible] + 5\vec{c}$, $\vec{x}_3 = 10\vec{a} - 5\vec{b} - 7\vec{c} + 3\vec{d}$

$\vec{x}_4 = 3[illegible]$, $\vec{x}_5 = 4\vec{d} [illegible] + 3\vec{b}$, $\vec{x}_6 = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} - 4\vec{d}$.

6 [illegible]lle $\vec{d}$ als Linearko[illegible]nation vo[illegible] $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar: L: 16

(a) [illegible]t $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) mit $\vec{d} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) mit $\vec{z} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

7 Stelle den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar: L: 18

(a) $\vec{x} = (5|5|-8),\ \vec{a} = (4|1|-1),\ \vec{b} = (3|2|4),\ \vec{c} = (1|0|-3)$

(b) $\vec{x} = (4|-2|0),\ \vec{a} = (1|-2|-3),\ \vec{b} = (1|1|2),\ \vec{c} = (1|-1|-1)$

8 Untersuche die lineare Abhängigkeit dieser Vektoren: L: 19

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-7\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$ d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-6\\-9\\12\end{pmatrix}$

e) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

9 Bestimme $k\in\mathbb{R}$ so, dass die Vektoren unabhängig sind: L: 20

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\k\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}k\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}[illegible]\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}k\\3\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\k-1\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

10 Bestimme $a\in\mathbb{R}$ so dass $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\a\end{pmatrix}$ eine Linearkombinati[illegible] von [illegible] $\begin{pmatrix}2\\3\\[illegible]\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\-1\\0\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$ ist. L : 21

11 Zeige, dass $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}[illegible]\\-1\\5\end{pmatrix}$ [illegible]e Basi[illegible] $\mathbb{R}$[illegible] bilden. L: 22

Berechne die Koor[illegible]ten von $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\[illegible]\\5\end{pmatrix}$ bezüglic[illegible]r neuen Basis.

12 Zeige, das[illegible] $\begin{pmatrix}2\\-8\\[illegible]\end{pmatrix},\ \vec{b}[illegible],\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\19\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible]ne Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. L: 23

[illegible]nn man die Vektore[illegible] $[illegible]=\begin{pmatrix}[illegible]\\-2\\-4\end{pmatrix}$ und $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$ dennoch durch $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen?

13 Für wel[illegible] Werte k [illegible]en $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\vec{b}_k=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_k=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? L: 24

Welche Koordinaten hat $\vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis im Falle k = - 1?

14 (a) Für welche k stellen $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\vec{b}_k=\begin{pmatrix}-1\\k\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_k=\begin{pmatrix}k\\5\\4\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ dar? L:25

(b) Welche Koordinaten hat $\vec{d}_k=\begin{pmatrix}2k\\4\\2\end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis?

(c) Überprüfe, ob (im Falle k = 1) der Vektor $\vec{d}_1$ durch sie darstellbar ist und wenn ja, wie.

15 Gegeben sind $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ sowie $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ L: 26

a) Für welche Werte von t sind $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?
Stelle in diesen Fällen $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

b) Stelle $\vec{x}$ im Falle der linearen Unabhängigkeit durch $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

c) Es gibt eine homogene lineare Gleichung, die für $t = 1$ die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zur Lösung hat. Bestimme sie.

16 Abhängigkeit im $\mathbb{R}^4$

L: 28

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

a) Zeige, dass sie linear unabhängig sind.

b) Stelle den Vektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\6\\-1\\6\end{pmatrix}$ durch diese Vektoren dar.

c) Untersuche, ob $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ und $\vec{d}$ = [illegible] linear unabhängig sind.

17 Gegeben sind $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ \text{[illegible]}\\3\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\ \text{[illegible]}\\ \text{[illegible]}\\4\end{pmatrix}$, $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\13\\8\\-1\end{pmatrix}$ L: 30

a) Zeige, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

b) Stelle $\vec{d}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
Stelle $\vec{e}$ als Linearkombination aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

18 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}$. L: 31

a) Zeige, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

b) Gilt $\vec{e}=\begin{pmatrix}-2\\5\\5\\11\end{pmatrix}\in\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$? Wenn ja, stelle ihn als Linearkombination dar.

c) Sind $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ und $\vec{e}$ linear unabhängig?

d) Für welches k gilt $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\k\\3\\8\end{pmatrix}\in\left[\vec{c};\vec{d}\right]$?

Aufgaben mit Basiswechsel

19 Gegeben ist die Basis $B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_E \right\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. L: 33

Rechne den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\-3\\3\end{pmatrix}_E$ auf die Basis B um. E sei die Standardbasis.

20 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_k = \begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}$ für $k \in \mathbb{R}$ L: 34

a) Für welche Werte von k bilden $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ auch eine Basis [illegible]

b) Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}6k+6\\3\\-5\end{pmatrix}$ bzg[illegible]er Basis $\mathbf{B} = \{\vec{a}, \vec{b},$ [illegible]

c) Es sei $\vec{d} = \begin{pmatrix}1\\2\\r\end{pmatrix}$. Für welches r ist $\vec{d} \in [$[illegible]

21 Gegeben sind die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$; $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}[illegible]\\1\\-1\end{pmatrix}$ und [illegible] $= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.. L: 35

a) Zeige, dass $\mathbf{B} = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ e[illegible]falls [illegible]asis [illegible] $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Berechne die Koo[illegible]aten von $\vec{x} = $ [illegible] bzgl. de[illegible]asis **B**.

c) Bilden $\vec{x}$, [illegible]nd $\vec{b}_3$ eben[illegible] eine Basis [illegible] $\mathbb{R}^3$?

22 Gegeben sind die [illegible]oren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\[illegible]\end{pmatrix}$, [illegible] $= \begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix}10\\-13\\-3\end{pmatrix}$ L: 36

Zeige, dass die [illegible]ktoren $\vec{a}$, [illegible] eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bilden.

Stelle den Vektor [illegible] durch diese Basis dar.

c) [illegible]ilden die Vektor[illegible] $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

d) We[illegible]r Vekt[illegible]ir bezüglich der Basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ dargestellt?

23 Bestimme die D[illegible]nension des aus $\vec{a} = (1|1|1)$, $\vec{b} = (1|k|1)$ und $\vec{c} = (1|1|k)$ erzeugten Vektorraums mit $k \in \mathbb{R}$. L: 36

24 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_t = \begin{pmatrix}2\\0\\t\end{pmatrix}$, $\vec{b}_t = \begin{pmatrix}0\\4\\2-t\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$. L: 37

a) Für welches t bilden $\vec{a}_t$, $\vec{b}_t$ und $\vec{d}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Berechne die Koordinaten von $\vec{c}$ bezüglich $\{\vec{a}_3, \vec{b}_3, \vec{d}\}$.

25 Es sei $\{\vec{b}_1 ; \vec{b}_2 ; \vec{b}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. L: 38

Zeige, dass dann auch

$$\vec{c}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$$
$$\vec{c}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$$
$$\vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

26 Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängige Vektoreneines reellen Vektorraums. L: 39

Welche Teilmengen von $\{\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-2\vec{v}, 2\vec{u}-\vec{v}\}$ sind linear unabhängig?

27 Gegeben sind zwei Basen $B_1 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ und $B_2 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ bezüglich der Standardbasis.

L: 40

Gibt es Vektoren, die bezüglich der Basen B_1 und B_2 dies[illegible]en Koordinaten bes[illegible]n?

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und [illegible] $= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; [illegible] $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\vec{b}_1$ [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; [illegible] $= \begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 4 \end{pmatrix}$, [illegible] $= \begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$; $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

28 Gegeben sind die [illegible]toren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, [illegible] $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L: 43

a) Sind diese Vek[illegible] [illegible]ar unabhängi[illegible]

b) [illegible] [illegible]inearko[illegible]ation [illegible] $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ dar.

[illegible] Für welches a g[illegible]rt $\vec{v} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ -[illegible] \\ a \end{pmatrix}$ zu dem von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ aufgespannten

[illegible]ntervektorraum [illegible] $\mathbb{R}^3$?

29 Gegeben si[illegible] $= \begin{pmatrix} [illegible] \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{d}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ L: 44

a) Ermittle $\dim[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ und $\dim[\vec{a}, \vec{b}]$:

b) Für welches t ist $\vec{d}_t \in [\vec{a}, \vec{b}]$? Ermittle dann die Koordinaten von $\vec{d}_t$ bzgl. $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

c) Berechne für t = - 4 die Koordinaten von $\vec{d}_t$ bzgl. der Basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Untervektorräume und Lineare Hüllen
aus Text 61110

1 a) Gegeben ist die Gleichung $x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$ im $\mathbb{R}^4$. L: 45

Zeige auf zwei Arten (wie soeben gesehen), dass ihre Lösungsmenge ein UVR des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Zeige allgemein:

Die Lösungsmenge der linearen, homogenen Gleichung c_1x [illegible] $+ c_nx_n = 0$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ aller n-T[illegible]l.

c) Zeige, dass die Lösungsmenge der inhomogenen line[illegible]n Gleichung $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

2 Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind Un[illegible]v[illegible]räume [illegible] sei $\vec{x}$ [illegible] x_2. L: 47

a) $M_1 = \{\vec{x} \mid x_2 = 0\}$

b) $M_2 = \{\vec{x} \mid x_1 + x_2 = 0\}$

c) $M_3 = \{\vec{x} \mid x_1 + x_2 = 5\}$

d) $M_4 = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 0\}$

e) $M_5 = \{\vec{x} \mid x_1 \cdot x_2$ [illegible]

3 Bestimme Dimens[illegible]nd eine [illegible]s von $U = [\vec{a}; \vec{b}]$ mit L 48

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ [illegible]) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 [illegible]imme Dimension [illegible] eine Ba[illegible] von $U = [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$ mit L 49

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ -\text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5 Gegeben sind die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L 51

a) Sind diese Vektoren linear unabhängig?

b) Stelle $\vec{b}_3$ als Linearkombination von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ dar.

c) Für welches a gehört $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$ zu dem von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

6 Gegeben: $\vec{a} = (-2|1|0)$, $\vec{b} = (1|2|1)$, $\vec{c} = (0|5|2)$, $\vec{d} = (-3|-1|-1)$ L 52

a) Zeige, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

b) Stelle $\vec{d}$ „allgemein“ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

c) Zeige, dass $\vec{e} = (0|5|-1)$ nicht durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden kann.

d) Welche Dimension hat der aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugte Untervektorraum?

7 **Gegeben sind** $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **und** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ L 53

a) Welche Dimension hat die Menge aller Linearkombinationen aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, also die Menge $U = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$? Gib eine Basis von U an.

b) Welcher der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ gehört zu U?

c) Nun sei $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Zeige, dass auch $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\}$ [illegible]e Basis des $\mathbb{R}^3$ bil[illegible].

8 Bestimme Dimension und eine Basis der Lösungs[illegible] U von [illegible] $x_2 - 2x_3 + 4$[illegible] $= 0$. L: 54

9 Bestimme Dimension und eine Basis der Schnittmen[illegible] U = [illegible] U_2 mit L: 55

a) $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$ und $U_2 = $ [illegible]

b) $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}\right]$ und $U_2 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \text{[illegible]}7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

10 Gegeben sind zwei U[illegible]vek[illegible]aume des $\mathbb{R}^3$ [illegible] $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right]$ und $U_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$.

a) Z[illegible] U_1 und U[illegible]rschied[illegible]nd.

b) [illegible]estimme [illegible]em die[illegible] Un[illegible]ektorräume eine lineare homogene Gleichung, deren Lösungsmeng[illegible] darste[illegible]
Ermittle eine Ba[illegible] der Schn[illegible]ttmenge $U_1 \cap U_2$.

c) Zeige durch Anga[illegible] eines Gegenbeispiels, dass die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2$ kein Un[illegible]ktorraum des [illegible] sein kann. L: 57

11 a) Besti[illegible] Basis des Untervektorraums $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 2x + y - 3z = 0 \right\}$ L: 59

b) Bestimme a, b und c so, dass die Vektoren von $U_2 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ Lösungen der

Gleichung $ax + by + cz = 0$ sind.

12 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix}0\\7\\3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix}5\\8\\4\\0\end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$. L: 60

a) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig? Welche Dimension hat der Untervektorraum $U = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$?

b) Gehören $\vec{d}$ und $\vec{e}$ zu U ?

c) Stelle $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ als Linearkombination durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{e}$ dar

13 Im $\mathbb{R}^4$ sind diese Untervektorräume gegeben: $U_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$, $U_2 = \left[\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\[illegible]\\[illegible]\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\[illegible]\end{pmatrix}\right]$ L: 62

a) Zeige, dass U_1 kein Untervektorraum von U_2 ist.

b) Ermittle Bestimmungsgleichungen für U_1 und U_2.

c) Ermittle eine Basis und die Dimension der [illegible]menge [illegible] U_2.

d) Durch das Gleichungssystem $\left\{\begin{matrix} x_1 + 2x_2 - 5[illegible] + [illegible] = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 [illegible] 2x_4 [illegible] \end{matrix}\right\}$ wird ein weiterer Untervektorraum U_3 definiert. [illegible]timme seine S[illegible]nittme[illegible] mit U_1.

14 Gegeben sind zwei Untervek[illegible]räume v[illegible] $\mathbb{R}^4$: L: 65

$$U_1 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mid \begin{matrix} [illegible]_1 + x_2 - 2x_3 [illegible] 0 \\ [illegible]_1 - x_2 + 2x_3 [illegible]_4 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ und } U_2 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Bestimme eine Basis vo[illegible] U_2, $U_1 \cap U_2$ u[illegible] $U_1 \oplus U_2$.
Welch[illegible] haben d[illegible] Räume?

15 [illegible]geben ist der Unterv[illegible]orraum U_1 von $\mathbb{R}^3$ durch $U_1 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$ L: 67

Bestim[illegible] einen Unter[illegible]torraum U_2 von $\mathbb{R}^3$, so dass gilt: $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.

16 Gegeben seie[illegible] Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$: $U_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$, $U_2 = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$, $U_3 = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$ L: 68

Zeige, dass das Distributiv in der Form $(U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$ nicht gilt.

17 Es sei $U_1 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$ und $U_2 = \left\{\begin{pmatrix}r\\2r\\3r\end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\right\}$ L: 69

Gilt hier: $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$?

Lösungen

1 Stelle $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar (Zeilenvektoren):

a) Gegeben: $\vec{x} = (-8|16),\ \vec{a} = (2|5),\ \vec{b} = (-4|2)$

Ansatz: $\boxed{\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s\vec{b}}$

d.h. $(-8\,|\,16) = r(2\,|\,5) + s(-4\,|\,2)$

d.h. $(-8\,|\,16) = (2r - 4s\,|\,5r + 2s)$

d.h. $\begin{Bmatrix} 2r - 4s = -8 & (1) \\ 5r + 2s = 16 & (2) \end{Bmatrix}$

Additionsverfahren:

$(1) + 2 \cdot (2)$: $12r = 24 \Leftrightarrow r = 2$

Aus (2) folgt damit $2s = 16 - 10 = 6 \Leftrightarrow s = 3$

Ergebnis: $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

b) Gegeben: $\vec{x} = (2|5),\ \vec{a} = (-5|$ [illegible] $3|7)$

Ansatz: $\boxed{\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}$

d.h. $(2\,|\,5$ [illegible] $s(3\,|\,7)$

d.h. $(2\,|\,5) = ($ [illegible] $3s\,|\,4r +$ [illegible]

$-5r$ [illegible] $3s = 2$
[illegible] $+ 7s = 5$ (2)

Additionsverfahren:

[illegible] $\cdot (2)$: [illegible] $7s =$ [illegible] $\Rightarrow s = \frac{33}{47}$

In (2): 4 [illegible] $5 - 7 \cdot \frac{33}{47} = \frac{4}{47} \Rightarrow r = \frac{1}{47}$

Er[illegible]is: $\vec{x} = \frac{1}{47}\vec{a} + \frac{33}{47}\vec{b}$

c) Gegeben: $\vec{x} = (5|8),\ \vec{a} = (2|4),\ \vec{b} = (3|6)$

Ansatz: $\boxed{\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}}$

Es folgt $\begin{Bmatrix} 2r + 3s = 5 & (1) \\ 4r + 6s = 8 & (2) \end{Bmatrix}$

Additionsverfahren:

$(2) - 2 \cdot (1)$ ergibt 0 = - 2.

Dieser Widerspruch zeigt, dass $\vec{x}$ keine Linearkombination aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.